7 класс

Задача 7.1. У Бори в три раза больше братьев, чем сестёр. а у его сестры Вали сестёр в семь раз меньше, чем братьев. Сколько в этой семье мальчиков и сколько девочек?

Задача 7.2. Паниковскому приснилось, что он получил 1 000000 рублей на блюдечке с голубой каемочкой. На все деньги он сразу купил кефир в бутылках по цене 7 рублей за бутылку (пустая бутылка стоила в то время 1 рубль). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и на все вырученные деньги сразу купил кефир и делал так, пока хватало хотя бы на одну бутылку. При этом он заметил, что между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Паниковский во сне?

Задача 7.3. Квадрат 9×9 клеточек разрезали по клеточкам на 14 прямоугольников. При этом длины обеих сторон каждого прямоугольника оказались больше 1. Могло ли случиться так, что среди этих прямоугольников не было ни одного квадрата?

Задача 7.4. Квадрат, нарисованный на клетчатой бумаге, удалось разрезать на трехклеточные уголки (рис. 1). Каков наименьший возможный размер этого квадрата?

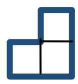

Рис. 1

Задача 7.5. Разрежьте произвольный треугольник на 3 части и сложите из них прямоугольник.

8 КЛАСС

Задача 8.1. Вычислите дробь, в которой 2014 двоек:

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\ddots_{2-\cfrac{1}{2}}}}.$$

Задача 8.2. Квадрат 9×9 клеточек разрезали по клеточкам на 14 прямоугольников. При этом длины обеих сторон каждого прямоугольника оказались больше 1. Могло ли случиться так, что среди этих прямоугольников не было ни одного квадрата?

Задача 8.3. Известно, что для некоторого натурального n числа $n-1$ и $n+1$ оба являются простыми числами. Докажите, что числа от 1 до n можно выписать в строку так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих чисел являлась простым числом.

Задача 8.4. На сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) соответственно взяты точки M и N такие, что $AN > AM$. Прямые MN и BC пересекаются в точке K. Докажите, что $MK > MB$.

Задача 8.5. Дано 100 целых чисел. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго вычли сумму цифр третьего числа, и так далее, наконец, из 100-го числа вычли сумму цифр первого числа. Могут ли эти разности равняться 1, 2, … , 100 соответственно?

9 КЛАСС

Задача 9.1. Набор чисел называется *хорошим,* если при удалении любого числа из этого набора оставшиеся числа можно разбить на две группы с равными суммами. Будет ли хорошим набор нечётных чисел 1, 3, 5, … , 2015?

Задача 9.2. Девять чисел таковы, что сумма любых четырех из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительны.

Задача 9.3. Можно ли найти такие числа p и q, что выражение $x^2 + px + q$ при любом целом x принимает целое значение, делящееся на 3?

Задача 9.4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P, а через точку C — прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q. Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

Задача 9.5. По кругу в некотором порядке по одному разу записаны числа от 1 до 2014. Для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих разностей?

10 КЛАСС

Задача 10.1. Набор чисел называется *хорошим,* если при удалении любого числа из этого набора оставшиеся числа можно разбить на две группы с равными суммами. Будет ли хорошим набор нечётных чисел 1, 3, 5, … , 2015?

Задача 10.2. Банк «Империал» при снятии денег со счета берет комиссию, состоящую из фиксированной платы за проведение операции и еще платы, пропорциональной взятой сумме. Например, при снятии со счета 5 тысяч рублей вкладчик заплатит 49 рублей 50 копеек, при снятии 8 тысяч — 72 рубля 90 копеек. Какую комиссию заплатит вкладчик, если он захочет снять со счета 9500 рублей?

Задача 10.3. Дан остроугольный треугольник ABC, CK и BM — высоты треугольника. Радиус описанной окружности треугольника KMB равен $2\sqrt{6}$, $AM = 1$, $AK = 2$. Найдите $\cos \angle BAC$.

Задача 10.4. Можно ли найти такие числа p и q, что при x, принимающем три каких-нибудь последовательных натуральных значениях, величина $x^2 + px + q$ окажется целой и кратной трем?

Задача 10.5. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет неравенствам $P(-n) < P(n) < n$ для некоторого целого n. Докажите, что $P(-n) < -n$.

11 КЛАСС

Задача 11.1. Набор чисел называется *хорошим,* если при удалении любого числа из этого набора оставшиеся числа можно разбить на две группы с равными суммами. Будет ли хорошим набор нечётных чисел 1, 3, 5, … , 2015?

Задача 11.2. Целое число $m > 1$ называется *универсальным делителем*, если существует квадратный трехчлен $x^2 + px + q$, принимающий целые кратные m значения при всех целых значениях x. Найдите все универсальные делители.

Задача 11.3. Каждое из неотрицательных чисел x, y и z не больше 1. Докажите:

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-z)^2}+\sqrt{z^2+(1-x)^2}\le 3.$$

Задача 11.4. 10 школьников по окончании 10 класса решили поступать либо на мехмат, либо на физфак. Некоторые школьники дружат между собой. Каждый понедельник они созваниваются с друзьями и обсуждают планы. Если большинство друзей некоторого школьника хотят поступать не туда, куда он, к следующему понедельнику он принимает мнение этого большинства. Докажите, что до окончания школы их мнения устоятся и не будут больше меняться.

Задача 11.5. Правильная четырёхугольная призма со стороной основания a и высотой h проектируется на плоскость, проходящую через сторону основания и составляющую угол x с плоскостью боковой грани, содержащей эту сторону. При каком значении x площадь проекции будет максимальной? Чему равно это максимальное значение?